第 9 章　設備の試験と診断

9.5.2　伝達関数の求め方

伝達関数は，第 3 章 3.11 でも述べたように，機械や構造物の振動特性を表す関数であり，入力 $f(t)$ と応答 $x(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と $X(\omega)$ を用いて

$$G(\omega)=\frac{X(\omega)}{F(\omega)} \tag{9.5.1}$$

で表される．ここで，X，F は振幅と位相の情報を持った複素数である．

実際に FFT 分析器において伝達関数を求める際には，式(9.5.1)を直接用いるのではなく，次の式(9.5.2)または式(9.5.3)の演算式が用いられる．

$$H_1(\omega)=\frac{F^*X}{F^*F}=\frac{S_{FX}}{S_{FF}} \tag{9.5.2}$$

$$H_2(\omega)=\frac{XX^*}{FX^*}=\frac{S_{XX}}{S_{FX}^*} \tag{9.5.3}$$

式(9.5.2)は式(9.5.1)の分母，分子にそれぞれ F の転置 F^* を掛けたもので，下記(注)に示すようにこれらはパワーを表し，F^*F は入力のパワースペクトル S_{FF}，$F^*X=(FX^*)^*$ はクロススペクトル S_{FX} と呼ばれる．同様に(9.5.3)の X^*X は出力のパワースペクトル S_{XX} である．

式(9.5.2)および式(9.5.3)に示すように，伝達関数の演算式は H_1 と H_2 の 2 種類があり，入力に誤差が入りやすい共振点近傍では H_2 がよく，応答側に誤差が入りやすい反共振近傍では H_1 の方が精度的に優れている．真の値 H は

$$H_1 \leqq H \leqq H_2$$

のように，H_1 と H_2 の間にあるので，両方法で測定し両者に差が少ないことを確かめるのが望ましいが，実験では H_1 の方が良く用いられる．

伝達関数測定の際には次式で定義されるコヒーレンスも重要である．

$$\gamma^2=\frac{\left|S_{FX}\right|^2}{S_{FF}S_{XX}}=\frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \tag{9.5.4}$$

コヒーレンスは入力信号と応答信号の 2 信号間の線形相関を表す関数で，周波数ごとに計算され，　0~1 の値を取る．つまり γ の値は $0 \leqq \gamma \leqq 1$ の範囲にあり，1 に近いほど関連性が強く測定データの信頼性も高くなる．たとえば，加振実験において $\gamma \fallingdotseq 1$ であれば測定した応答は自分が加振した結果によるものであり，ノイズや他の加振源による成分はほとんど含まれていないことを意味する．したがって伝達関数測定においてコヒーレンス値が 1 に近ければ精度のよいデータが得られていることになる．ただし，二度打ち（ダブルハンマ）の場合や，モードの節をハンマリングした場合，センサーが傾いて

いた場合でも$\gamma \fallingdotseq 1$になることがあるのでコヒーレンス値だけで実験の成功を示すものではない．

　なお，伝達関数を定義式(9.5.1)で計算するのではなく，式(9.5.2)などのようにパワースペクトルを計算してから求めるのは，パワー計算に平均化処理などを導入して精度のよい安定した結果を得るためである．

(注)複素数の積，パワーの計算

複素数を$\boldsymbol{a} = |A|e^{i\alpha} = A_r + jA_i$，$\boldsymbol{b} = |B|e^{i\beta} = B_r + jB_i$，と表した時，その積は

$$\boldsymbol{ab} = |A||B|e^{i(\alpha+\beta)} = (A_rB_r - A_iB_i) + j(A_rB_i + A_iB_r)$$

と表される．ここでjは複素単位，添え字r，iは実部，虚部を表す．

(1) パワースペクトル

$\boldsymbol{a}$として加振力$F = F_r + jF_i$，　$\boldsymbol{b}$としてその共役複素数$F^* = F_r - jF_i$を取った場合は

$$FF^* = F_r^2 + F_i^2 = |F|^2$$

となりFF^*は振幅の自乗すなわちパワーに相当する値になる．パワースペクトルには位相の情報は入っていない．

(2)クロススペクトル

$\boldsymbol{a}$として加振力$F = |F|e^{j\alpha} = F_r + jF_i$　,$\boldsymbol{b}$として応答$X = |X|e^{j\beta} = X_r + jX_i$を取った場合，

F^*とXの積は

$$F^*X = |F||X|e^{j(\beta-\alpha)}$$

となり，大きさはそれぞれの振幅値の積，位相角は$(\beta - \alpha)$となる．クロススペクトルF^*Xには位相の情報が含まれている．

(3)コヒーレンス

コヒーレンスの定義式(9.5.4)に上述の値を代入すると

$$\gamma^2 = \frac{|S_{FX}|^2}{S_{FF}S_{XX}} = \frac{|F^*X|^2}{FF^*XX^*} = \frac{|F^*X|^2}{|F|^2|X|^2}$$

となる。コヒーレンスγは入出力間の因果関係の度合いを示すものである。